

古代インドにおける数字と記数法 に関する一考察

にし の よし はる
西 野 芳 治

1. はじめに

今日、私たちが数を表記するとき、1、2、3、4、5、6、7、8、9および0の10個の数字を使って、十進位取り記数法を用いて数を表している。この十進位取り記数法は、わずか10個の数字だけでどんな大きな数でも書き表すことができ、数を表記する方法としては非常に優れた方法である。私たちが現在用いている数字や記数法に到達するまでに、いろいろな民族がさまざまな数字や記数法を用いてきた。これらの数字や記数法の中で、現在の数字や十進位取り記数法に直接繋がっているものは、古代インドにおける数字や記数法である。

インドには2種類の筆記体があった。インドで数字が確認されたのは、紀元前3世紀に各地に建てられたアショーカ王碑文に表記されたものが最初である。この碑文は、あるものはブラーフミ文字、あるものはカローシュティ文字、あるものはギリシャ文字で書かれている。カローシュティ文字は紀元前5世紀から3世紀にわたってインド西北部で使用された。バラモン筆記体ブラーフミはすべてのインド文字の母体である。今日広く使われているデヴァナガリー文字もこの中に含まれる。

本稿では、ブラーフミ数字や古代インドの記数法の特徴およびこれらの数字や記数法がどのように発展し、十進位取り記数法に到達

したのか、その道筋について考察する。

2. 位取り記数法

古代インドの記数法について考察する前に、まず私たちが現在用いている十進位取り記数法の特徴について確認する。次に、人類最初の位取り記数法と言われる古代バビロニアの記数法について述べる。

2.1 十進位取り記数法

現在、私たちが用いている記数法には、二つの規則がある。第1の規則は10を基本単位とすることである。すなわち十進法を用いている。

物の個数を数えたり、数字・記号によって数を表す場合、個々の数に一つずつ数字を当てていくことは原理的に不可能である。また、単位の数、たとえば1の数字を必要な数だけ繰り返して並べると、大きな数を表す場合は非常に不都合である。そこで、ある数を決めて、数がその大きさだけ増えるたびごとにその数でまとめたり、束ねたりする方法が採られる。このまとめる(束ねる)ときの個数が底である。

底を決めると、それを基に1次の単位、2次の単位…と単位がつくられる。多くの記数法では、底が10であった。すなわち、十進法であった。1を1次の単位とすると、1が10個まとまった10が2次の単位であり、10が10

個まとまった100が3次の単位となる。

第2の規則は、それぞれの構成単位の個数を書き表す場所が定められていることである。すなわち、位取りの原理が用いられている。

それぞれの単位は数字の“位置”によって表される。すなわち、右端は1次の単位であり、十進法では一の位となる。右端から2番目は2次の単位、3番目は3次の単位…となる。数字の位置そのものに単位が組み込まれているから、単位を明記する記号は必要としない。

十進法と位取りの原理を用いて数を表してみる。たとえば、6483と表記すると、“ろくせんよんひゃくはちじゅうさん”と読み、数としては $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ を表す。

2.2 バビロニアの位取り記数法

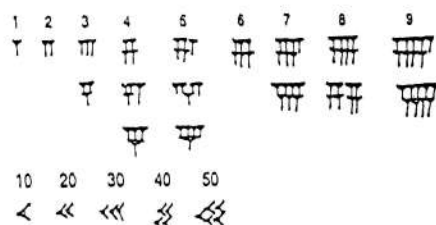
古代バビロニアでは、十進法と六十進法を併用した位取り記数法が用いられていた。空位を示す記号も用いられた。バビロニアの数字と記数法を図1に示す。1～59までは、1を表す記号と10を表す記号を繰り返し並べて表している(図1①)。60になれば、1と同じ記号が再び使われ、60²も1と同じ記号であった(図1②、③、⑤、⑥)。

つまり、位取りの原理が用いられていた。それぞれの位では、必要な数だけ同じ記号を繰り返す加算方式であった。最初は空位を表す記号がなかったため、たとえば、83($1 \times 60^1 + 23 \times 60^0$)と3623($1 \times 60^3 + 23 \times 60^0$)は同じ配列(図1③)になり、どちらを表すかわからず、混乱が生じた。この混乱を避けるため、はじめは必要な個所に隙間をつくっていたが、忘れたりとはっきりしない場合もあり混乱はなくならなかった。

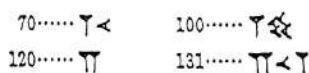
この問題を解決するために、ずっと後に(前300頃)空隙を表す記号が導入された(図1④、⑤)。この空隙を表す記号は現代のゼロ

に相当する記号である。しかし、数学者の間では、この記号は数の終わりに置かれることはなかった。たとえば、 $60(1 \times 60^1 + 0 \times 60^0)$ を位取りの原理に基づいて六十進法で表すならば、縦型の楔一つと空隙記号一つで表さなければならない。しかし、縦型の楔一つで60を表していた(図1⑥)。天文学者は空隙記号を中間の位置ばかりでなく、数の末尾に演算子として用いていた²⁾が、この記号はあくまでも数字の列の中の空所を表す記号であり、数えるものがない状態や無を表すという考え

① 1～59の表し方



② 60～の表し方



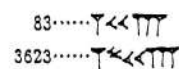
③ 同じ配列を示す場合



④ 空隙を表す記号



⑤ 空隙記号を用いた表し方



⑥ 60の表し方

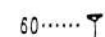


図1 古代バビロニアの位取り記数法
(上垣 渉・何森 仁¹⁾、「数とその歴史53話」、三省堂よりアレンジ)

はなかった。

3. 位取りの原理と計算盤

3.1 位取りの原理と計算盤

十進位取り記数法の柱の一つである位取りの原理は、古代バビロニアの記数法だけでなく、実は古い時代からさまざまな民族の間で用いられていた。ただ、その意味や重要性はよく理解されていなかったと思われる。

最初、人は指を用いて計算をした。指は人間が用いた最初の計算器であると言える。計算する数が大きくなると、世界中の多くの地域で計算盤(アバクス)が用いられた。ローマのカラクリ式計算盤の基本形を図2に示す。計算盤の台盤を細長い縦の欄に分け、その一つ一つに一の位、十の位、百の位、千の位などを割り付けていた。縦の欄の中にあるカラクリ(計算玉)の数によって、そのグループ(位)の数を表した。すなわち、計算盤上では位取り表記によって数が表され、足し算や掛け算などは計算盤を用いて計算されていた。古代エジプトやバビロニア、ギリシャ、ローマなどにおいて、位取りの原理は、このように計算盤上では古くから用いられていた。

3.2 計算と数の表記が分離

しかし、計算盤で計算した数を記録する際

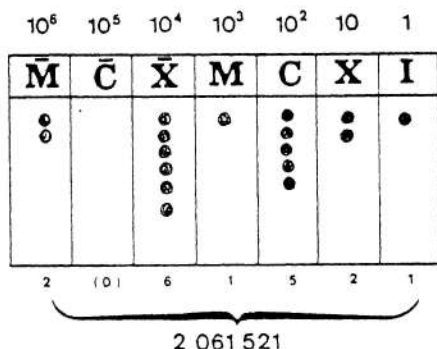


図2 計算盤の原理。数2061521を示す。
(ジョルジュ・イフラー³⁾、「数字の歴史—人類は数をどのようにかぞえてきたか—」, 平凡社より)

に用いた表記法は、位取り記数法ではなく各民族独自の記数法であった。計算盤上では位取りの原理に基づき数を表していたにもかかわらず、位取りの原理を用いて各位の数を並んでいる順に並べて書くのではなく、それぞれの位を表す数字・記号を用いて表した。計算盤上で用いている数の表し方と同じ方法で数を記録すればよいのであるが、このことに気づけなかったのである。

つまり、計算と数の表記が分離しており、数を計算することと数を表記することは別の次元で考えられてきた。

4. 古代インドの記数法

古代インドの数字・記数法とその発展について、さまざまな民族の数字・記数法に見られる特徴や規則に触れながら考察する。

4.1 十進法

インドで用いられていたインドアーリアン語系数詞は、基本的には十進法であり、ある単位の数の十倍で新しい位を示す名称が導入された。すなわち、命数法(数を口頭で呼び方)や記数法における底は10である。インドの記数法も多くの地域で用いられた十進法であった。

アーリア人が作り出した一連の文献群であるヴェーダ文献とヒンドゥー教系の数学書、天文学書によれば、紀元前1000年頃には既に 10^{12} までの十進構造による数詞が知られていた。また、紀元700年頃には 10^{17} までの数が知られていた⁴⁾。数の位を一段ずつ次の“階”へ上がると、その位は新しい独自の名称を持つ。このような数の構造は多くの階層からなる高層建築物を作る形式になぞられ、インドの数の塔と呼ばれている。K.メニングガーによれば26431は2ayuta 6sahasra 4śata 3dasa 1 ($2 \cdot 10^4 / 6 \cdot 10^3 / 4 \cdot 10^2 / 3 \cdot 10^1 / 1 \cdot 10^0$)と表され、十進法に沿った数の表し方(呼び方)になっている⁵⁾。

また、インドにはヒンドゥー教系の数詞⁶⁾の他に仏教系の数詞⁷⁾、ジャイナ教系の数詞⁸⁾がある。これらの数詞の呼び方は若干異なっているが、日常生活によく使われる1、10、100、1000の呼び方はヒンドゥー教系、仏教系、ジャイナ教系の数詞とも皆同じである。

4.2 数記号の暗号化

数字や記数法の歴史を辿ると、初期には、ある数を表す場合、数の序列に従って単位の数の記号を一つずつ増やしていく方法が生まれた。すなわち、単位の数字を必要な数だけ繰り返して表していた。

古代エジプトの数字や記数法を図3に示す。エジプトの象形文字を用いた数字(図3の1、2段目)や記数法(図3の3段目)では、

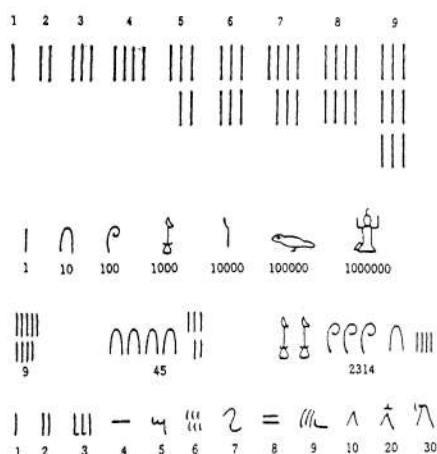


図3 エジプトの数字と記数法
(イー・ヤー・デップマン⁹⁾、「算数の文化史」, 現代工学社より)

たとえば、45を表すとき、2次の単位10の数字を4個、1次の単位1の数字を5個繰り返して表した。この方法は、演算の方式で言えば加算型の方式である。この方法では、同じ記号を何回も書かねばならず、面倒であり、大きな数を表す場合には大変不都合であった。

経済生活の発展によって、文字や数字をもっと早く書くことが必要になってきた。そこで、象形文字が記号に変えられ、神官文字が生まれた。一つの記号の繰り返しによって表されていた1から9までの数は、それぞれ独自の記号となった。数を絵(象形文字)で表すことから暗号化されたと言える。象形文字(図3の1段目)と暗号化された神官文字の数字(図3の4段目)を比較すれば、暗号化文字の簡潔さ是一目瞭然である。

インド・バラモン教の数字を図4に示す。図4には一の位、十の位、百の位、千の位などの数字が示されている。図4(上)の数字を見ると、単位の記号を繰り返す傾向が一部残っている(1、2、3の数字)と見ることもできるが、全体的に見れば、暗号化されていると考えられる。これらの数字を見ると現代の数字に似ていることが分かる。1~9までの数は一つずつ独自の個別の数字をもっており、たとえば数7、8、9は1の数字をその数だけ並べて表記しなくてよい。

その結果、読み間違いや書き間違いも少なく、数の表記からあいまいさがなくなり、簡潔明瞭になっている。このように、インドに

一の位	単位数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
十の位	暗号化	α	σ	ρ	×	J	4	Σ	φ	⊕
百の位 と 千の位	位取り表記	7	7	7	7	9	9	9	9	9
		100	2百	3百	4百	5百	1000	4千	7千	7千

図4 インド・バラモン数字
(K.メニンガー¹⁰⁾、「図説 数の文化史—世界の数字と計算法—」, 八坂書房より)

においてもエジプトと同じように数記号が暗号化されている。

4.3 十の位の数字も暗号化

十進位取り記数法においては、一の位の数を表す記号だけが必要であり、それらが暗号化されればよいのである。十の位の数を表す記号は必要ではない。しかし、一の位の数字にとどまらず、十の位の数字、10、20、30、40、50、60、70、80、90も数の順序にとられる形でなく独自の数字になっている(図4中)。一の位の数を簡潔に表すために暗号化したように、十の位の数を表す方法として同じ暗号化の方法を採っている。十進位取り表記の方法は考えられていない。10、20…に対応する数字を考え出し、それら十の位の数字と一の位の数字との和によって数を表していた。

十の位の数字も暗号化された例は、インドだけでなく、エジプトの神官文字にも見られる。図5はエジプトの十の位の象形文字数字と暗号化された神官文字数字を表している。図5(上)では、10を示す象形文字数字を繰り返して数を表しているが、図5(下)では、独自の数字になり簡潔明瞭になっている。記数法の歴史では、それぞれの数に特有な記号を当てることが自然な形で始められた。

序列化	10	20	30	40	50	60	70	80	90
暗号化	𐦏	𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏
	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏	𐦏

図5 エジプトの十の位の数字

(K.メニンガー¹¹⁾，「図説 数の文化史—世界の数字と計算法—」，八坂書房より)

100	200	300	400	1 000	2 000	3 000	4 000	6 000	8 000	10 000	20 000	70 000
𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏	𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏

図6 ナーシク洞窟の仏教碑文の数字

(ジョルジュ・イフラー¹²⁾，「数学の歴史—人類は数をどのようにかぞえてきたか—」，平凡社より)

4.4 具体的位取り表記法

4.4.1 百の位、千の位の数を表す方法

百の位と千の位の数を表す方法について考察する。百の位の数字(100、200、500)と千の位の数字(1000、4000)が図4(下)に表されている。図4(下)において、200は100を表す数字に横棒1本を付加している。100+1×100という発想である。500は、左半分が100の数字、右半分が一の位の数字5であり、これらを組み合わせた形である。100×5であると考えられ、掛け算を使っている。

図6の数字は紀元半世紀ごろのナーシク洞窟の仏教碑文に見られる数字である。100、200については、図4(下)と同じである。300も200と同じ考え方で、100に横棒を2本付加し、100+2×100を表している。

400は、左半分が100の数字、右半分が4の数字であり、100×4を表している。すなわち、数字の左半分が百の位を表し、右半分が一の位の数を表している。

図4(下)および図6を見ると、200、300は100に横棒を付けたし、100+100+…という足し算の発想は残しながらも、100の記号を繰り返して用いず、100という数字を基準にして数を表している。

400、500は、100を表す数字を100の位を表す記号として用い、これと一の位の数字4、

5を組み合わせている。

K.メニンガーは、これらの数は位取り表記法で表されていると述べている¹³⁾。つまり、百の位の数を表す方法として、100の数字を繰り返して書くのではなく、百の位を表す記号として100の数字を用いている。そして、百の位を表す記号と一の位の数を表す記号を組み合わせている。これは一種の位取り表記であり、具体的位取り記数法と呼ばれているが、本稿では以降具体的位取り表記法と表記する。

千の位の数を表す方法も百の位の数を表す方法と同じである。図4(下)および図6において1000の記号は1000を表す独自の数字である。2000は1000の数字に横棒1本を付加している。1000+1×1000という発想である。3000も2000と同じ考え方で、1000に横棒を2本付加している。1000+2×1000という考え方である。

4000、6000、8000については、左半分が1000を表す数字、右半分が一の位の数字であり、4000、6000、8000の数字は、それぞれ、4×1000、6×1000、8×1000を表している。

千の位の数についても、千の位を表す記号と一の位の数を組み合わせて表しており、具体的位取り表記法を用いていると言える。

しかし、位取り表記であっても、百の位、千の位など位を表す記号を用いている限り、それは真の位取り記数法ではない。

10000を表す数は、左半分が1000、右半分が10を表している。1000×10という考え方である。20000、70000については、1000×20、1000×70の形である。一万の位の数を表す方法は百の位や千の位の数を表す方法と同じではない。10000という新しい記号を増やさない方法を考えたのであろうか。あるいは、K.メニンガーが「明確な計算の限度が千の位であった¹⁴⁾」と述べているように、日常用いる計算は千の位が限度であったため、1000を基準にして考えたのであろうか。これらの事情

については分かっていない。

4.4.2 インドとエジプトの位取り表記法の比較

この具体的位取り表記法は、インドだけでなくエジプトにおいても用いられた。このようすを図7に示す。図7(1段目)では、千の位の数字、7000、8000、9000が暗号化されている。しかし、それらより大きい一万の位の数、20000、30000、40000(図7の2段目)は暗号化されず、10000の記号を必要な数だけ繰り返して並べて書くというK.メニンガーの唱える序列化に突然逆戻りしている¹⁵⁾。数字、記数法の歴史において、後退した例である。

ところが、図7(3段目)では、一万の位の数である50000、60000、70000、80000、90000が位取り表記法で表されている。10000を表す記号(図7の2段目)と一の位の数を表す記号(図3の4段目)を組み合わせて数が表されている。つまり、50000から90000(図7の3段目)までの数字は、同じ記号を繰り返して書く序列化の方法(10000~40000の数字)から、暗号化を辿らずに一段飛び越えて具体的位取り表記法が用いられている。記数法が後退したり一段飛び越したりして、表し方・考え方が一貫しなかったと推測される。

インドの具体的位取り表記法とエジプトの具体的位取り表記法を比較すれば、インドで

暗号化			
	7000	8000	9000
序列化			
	1	2	3
位取り表記			
	5	6	7
			
	10000	10・10000	100000

図7 エジプトの具体的位取り表記
(K.メニンガー¹⁶⁾、「図説 数の文化史—世界の数字と計算法—」, 八坂書房より)

は百の位と千の位で具体的位取り表記法という同じ方法が終始用いられた。具体的位取り表記から序列化の方法へ戻ることはなかった。また、インドではエジプトよりも小さな数(百の位)から数を簡潔に表す工夫がされ、位取り表記が始められた。

4.5 記数法における算術規則

前項で述べたインドの数字と記数法の特徴およびその算術構造について整理する。数を表す記号は、全部の記号が互いに独立しているわけではない。ジョルジュ・イフラーが述べているように、その数に特有な記号が与えられている数は、次のように、①一の位の数(1、2、3、4、5、6、7、8、9)、②十の位の数(10、20、30、40、50、60、70、80、90)、③100、④1000の四つに分けられる¹⁷⁾。

次に、数の表し方の構造について考えると、11から99までの表し方は位取り表記ではない。10、20、30、40、50、60、70、80、90を表す記号と1から9までの数字を用いて足し算で表されている。

百の位の数字、100、200…は、前項で述べたように具体的位取り表記法で表され、次の算術規則に対応している。

$$200 = 100 + 1 \times 100$$

$$300 = 100 + 2 \times 100$$

$$400 = 4 \times 100$$

$$500 = 5 \times 100$$

.....

千の位の数字も具体的位取り表記法で表され、次の算術規則に対応している。

$$2000 = 1000 + 1 \times 1000$$

$$3000 = 1000 + 2 \times 1000$$

$$4000 = 4 \times 1000$$

$$5000 = 5 \times 1000$$

.....

ここで、上記の200、300、2000、3000をそれぞれ $200 = 2 \times 100$ 、 $300 = 3 \times 100$ 、 $2000 =$

2×1000 、 $3000 = 3 \times 1000$ のように掛け算に書き直せば、上記の数は、(一の位の数)×百、(一の位の数)×千と表すことができ、第2節で述べた十進位取り記数法の構造に近くなる。

万の位の数を表す数字は次の算術規則に対応している。

$$10000 = 1000 \times 10$$

$$20000 = 1000 \times 20$$

$$30000 = 1000 \times 30$$

.....

1000×10 、 1000×20 …という考え方は、 100×2 、 100×3 …、 1000×2 、 1000×3 …という百の位や千の位の数を表す計算規則と一致しない。

5. 具体的位取り表記法から(抽象的)位取り記数法へ

5.1 数6483を具体的位取り表記法で表す

第4節第4項では、古代インドにおいて、百の位、千の位の数が具体的位取り表記法で表されていると述べた。本項では、たとえば6483という数がどのように表されているかについて述べる。

サンスクリットによる数の呼び方(命数法)および数字による表現(記数法)、算術規則を図8に示す。図8(上)の文字はサンスクリットの数の呼び方を表しており、桁の順序は現在の方法とは逆に左から右になっている。

図8(中)は6483という数字を表している。左端の数字の左半分は1000を表す数字であ

tri aṣṭiṭi caturśata satsahasra

三 八十 四-百 六-千

१५ ३५ ०३

1000×6 + 100×4 + 80 + 3 →

図8 数6483の呼び方と数字・記数法
(ジョルジュ・イフラー¹⁸⁾，「数字の歴史—人類は数をどのようにかぞえてきたか—」，平凡社より)

り、ここでは千の位を表す記号として用いられている。右半分は一の位の数字6である。算術規則では、左の数字は図8(下)に表されているように、 1000×6 である。

左から2番目の数字は、百の位の数である。左半分は百の位を表し、右半分は一の位の数字4である。算術規則は 100×4 である。すなわち、百の位を表す記号と一の位の数字を組み合わせて、一つの数を表している。

左から3番目の数字は、十の位の数80を表している。この数字は具体的位取り表記でなく、80に与えられている独自の数字である。

右端の数字は一の位の数3を表している。図8の数は、算術規則で表すと $1000 \times 6 + 100 \times 4 + 80 + 3$ となる。

具体的位取り表記法の観点から見ると、右から2番目の数字80についても、百や千の位の数を表した方法を適用しなければならない。十の位を表す数字と一の位の数を表す数字を組み合わせて、具体的位取り表記法で80を 10×8 と表せば、図8(中)の数字の算術構造は、 $1000 \times 6 + 100 \times 4 + 10 \times 8 + 3$ となる。これを、 $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ と見なせば、第2節で述べた十進位取り記数法の構造とまったく同じである。

十進位取り記数法では、位を表す記号は用いず、数字の占める位置で単位の大きさを表す。単位の数個数を表す数字、6、4、8、3をこの順に並べて6483と書くと、数として $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ を表す。

インドの記数法は、算術構造において、十進位取り記数法にすぐ近くまで到達していたのである。十進位取り記数法を用いている立場から見れば、インドの記数法は $1000 \times 6 + 100 \times 4 + 80 + 3$ をどのように表せば、さらに少ない記号で、より簡潔明瞭に表すことができるか、また、計算上便利であるかが問題であったと言える。もちろん、当時の人々が解決すべき課題として明確に捉えていたかどうかは不明であるが、インドの記数法は、こ

の段階まで発展してきたのである。

5.2 古代インドの書板計算

具体的位取り表記法から(抽象的)位取り記数法に到達する道筋について考察する前に、まず古代インドにおいて、数計算がどのように行われていたかについて述べる。インドでは、古くから暗算(ガナナ)と指算(ムドラ)が行われていた¹⁹⁾。この指算は木片の上に砂をまき、手の指や棒を使って計算する方法であり、この木片(書板)は縦横30cm足らずの小さな板であったと言われている。商業の発達や文化の向上に伴って、暗算よりも指算が主に行われるようになり、数計算は書板計算と言われるようになった。

インドには、アバクス(計算盤)がなかったと言われていたが、少なくとも、4、5、6世紀の西北インドには一種のアバクスが存在した可能性が指摘されている²⁰⁾。しかし、どのようなものか、どの程度利用されたのかは分かっていない。計算は主として書板計算で行われたと考えてよいと思われる。

第3節で述べたように、エジプトやバビロニア、ギリシャ、ローマでは、数計算と数表示は別の次元で考えられていた。数計算は計算盤で行われ、数を記録する際は各民族で定められた独自の方法で行われていた。

インドでは、狭い書板上で数表示を考え、それらの数字を使って計算しなければならない。数計算と数表示が同じ次元で考えられるようになったのである。この点がエジプトやバビロニア、ギリシャ、ローマと大きく異なる点である。

5.3 記録・計算をしやすくする工夫

船山良三は、書板計算の加算²¹⁾、減算²²⁾、掛け算²³⁾の方法を紹介している。書板計算で注目すべきことは、計算中に数字を消して書き直すことである。次々に計算途中で数字が書き直されるので、数の大きさがはっきり

分かり、書きやすく、書き間違わない簡潔な数字や記数法を工夫しなければならなかった。

このような数字や記数法の工夫に従って、本節第1項で扱った数6483の表記がどのように変遷・推移したかについて推測する。図9は数6483の表記の変遷を表したものである。数6483は、最初は図8および図9(上)のように具体的位取り表記法で書かれていた。

位取りを明確にし、数の表記を簡潔にするため、書板上に枠目をつくって1から9までの数字を使って書き表す方法(図9中)が用いられたと推測される²⁵⁾。右端の第1番目の枠目には一の位の数値を示す3の数字、次の枠目には十の位の数字8、第3番目の枠目には百の位の数字4、第4番目の枠目には千の位の数字6が書かれた。そして、ある位の数が欠如している場合には、空白の枠目を用いたと言われている。80を表す数字は、図9(上)のような80に特有な数字を用いていたが、枠目を利用するようになると、位取りの原理を用いて一の位の数字8を使うようになった

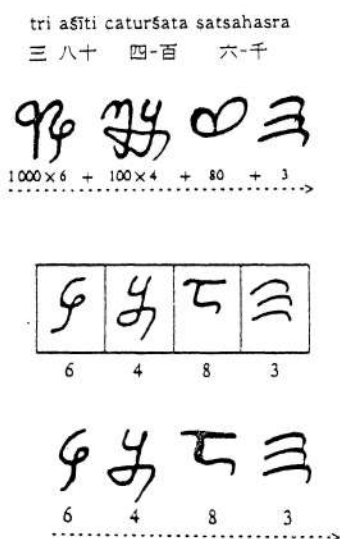


図9 数6483の表記の推移
(ジョルジュ・イフラー²⁴⁾、「数字の歴史—人類は数をどのようにかぞえてきたか—」, 平凡社よりアレンジ)

(図9中)。そして、一の位、百の位、千の位のすべての位で位取りの原理に基づく表記法が用いられた。

5.4 具体的位取り表記法から位取り記数法へ

具体的位取り表記法から位取り記数法に到達した道筋はよく分かっていない。次のようにいろいろな推測が行われている。

前項で述べたような枠目を作って、枠目の順序に従って1から9までの数字だけで数を書き表す習慣が定着すると、書板の枠目を徐々に削除するようになり、遂には無条件に削除するようになったと言われている。その結果、それぞれの数字には、その数字の位置に従った意味が与えられ、たとえば、6483という数は図9(下)のように厳密に位取り記数法に沿った形式で表現されたと推測される。

これに対して、K.メニンガーは、前項で述べた抹消計算について次のように述べている。「足し算をする二つの数、たとえば、1803と271を計算板上にバラモン数字で書いたのであろう。それを加え合わせた和2074は、各単位数を消して書きなおすことで容易に得ることができたであろう²⁶⁾」

抹消計算で数字を消して書き直すことについて、次のような推測もできる。たとえば、6483は具体的位取り表記法では、d6 c4 b8 3と書くことができる。ここで、d、c、bはそれぞれ千、百、十の位を示す記号である。dと6、cと4などは実際には繋げて書かれていて一つの数字であった。狭い計算板なので文字を消してまた書く。d、c、bは変わらず、6、4、8、3は消され、他の数字に置き換わっていく。つまり、左半分の位を表す記号は変えずに、それらがいくつあるかを示す右半分の数字を消して書き直せばよいのである。

そして遂には、左半分の位を表す記号は必要ではないと判断され、d、c、bなどの記号

は書かれなくなったと推測することができる。その位の数がなければ数字を消して、空白にしておけばよい。

また、イー・ヤー・デップマンによれば、現在私たちが電話番号を読み上げるように、大きな数の場合、それぞれの桁の数を読み上げていた²⁷⁾。そのとき、それぞれの桁の数を読み上げるだけでなく、数字で書きとめる場合もあったであろう。その際、位を表す記号を書かずに、読み上げる数の通りに1～9までの数字で数を書き表すようになったとも考えられる。

ゼロを含むインド式位取り記数法が誕生したのは紀元5世紀ごろのことであるが、ブラーフミ数字で位取り表記が確認される最古のものは、サンケーダで発見された銅板の銘文である。それにはその発行年が古代インドのチェーディ暦と思われる年号で346年と位取り表記で表されており、これは紀元595～596年である²⁸⁾。

5.5 ゼロの記号の誕生

第5節第3項で述べたように、数を表記する際に、ある位の数が欠如していることを示すため、最初は空白の罫目に用いたという説がある。書板上に位取りを示す罫目を書かなくなると、新しい記号の導入が必要であることが次第に分かってきたと思われる。

一方、K.メニンガーは、書板上で計算した結果の数2074を記録する際、「砂板で計算したときに用いたバラモン数字と同じ数字で書き記したであろう。この目的には、見えない場所を示す何らかの記号があったに違いない。それは、たとえば点として、 $2 \cdot 74$ であっただろう²⁹⁾」と述べている。

また、前項で大きな数の場合、電話番号を読み上げるようにそれぞれの桁の数を読み上げていたと述べたが、その際、ある桁の数が無い場合、“無し”と言った。そして、何もない桁のところは、何かの記号で表す必要が

あると考えられ、そのため、最初は点が用いられたと推測できる。

ゼロ記号の誕生の経緯は明確ではないが、インドでゼロ記号が誕生し、この記号は最初点とか小さな丸によって表されていた。サンスクリットでは、このゼロ記号に、*śūnya*(空白)、*kha*(天空)、*gagana*(空間)、*ambara*(大気)、*bindu*(点)など、さまざまな呼び名が与えられた。

この記号をゼロと言うようになったのは、インドの数字と記数法がイスラム社会を通じてヨーロッパに広まってからであり、13世紀以降のことである。

5.6 数としてのゼロ

このゼロは、単に数字の列の中間において空位を表すだけでなく、数字の列の最後においても空位を示すものとして用いられた。また、単なる記号ではなく数字として考えられた。この点がバビロニアの空隙記号と大きく異なるところである。

さらに、足し算や引き算などの計算の対象として考えられた。このような意味で、ゼロは数として考えられたと言える。天文学者ブラフマーグプタ(598～660頃)は、算数計算にゼロの使用を認め、ゼロの使い方の研究もした。ブラフマーグプタは天文学書『ブラーフマスプタ・シッダーンタ』の中でゼロについての計算法則を次のように述べている。「どんな数にゼロを加えたり、引いたりしても結果の値は変わらない。どんな数にゼロを掛けても、その結果は常にゼロである」。すなわち、7世紀には既にゼロの概念が定着していて、ゼロは計算し得る一つの数であった。

インド数字とその記数法は、8世紀に中央アジアの学者の紹介によってアラビア人に知られるようになる。天文学者のアル・フワーリズミー(780頃～850頃)はその著書『インド数字による計算法』において「減法で何も残らないときは、その場所が空白にならないよ

うに、小さな円を書いておかなければならない」とゼロ記号について述べている。

ただ、ゼロによる割り算は、ゼロを分母として持つものとして研究されたが、インドの数学者を悩ませた³⁰⁾。

5.7 ゼロ(0)とオミクロン(o)

ゼロはインドにおいて独自に生まれたのではなく、外部からの刺激によって生まれたという説がある³¹⁾。ギリシャの天文学者プトレオマイオスは、紀元130年頃、彼の著作『アルmageスト』で、角度を表す際に、六十進法の分数を用い、数の列の空位には、オミクロン(o)を用いた。それはギリシャ語oudén(何も無い)の略号であった。天文学においては、空位を示すゼロの記号が使われ、位取りの原理が用いられた。インドの位取り記数法の発達の最後の段階において、ギリシャのこの方式が影響力を持ったということは十分考えられることである。

6. “空”概念と数学的思考

6.1 ゼロと“空”概念

ゼロ記号の誕生について、数を位取り表記するときに、そこに数字が無いことを表す実用的な必要性から、ゼロ記号が導入されたのであろうと述べた。しかし、“無い”ことを記号化する、“無い”ことを表す記号を存在させることは、実用性だけでなくそれなりの思想的な背景とが相俟って生まれ出されたと考えられる。この思想的背景はインドの宗教にあったと言われている³²⁾。

仏教もヒンドゥー教も古代アーリア人の宗教であったバラモン教を基礎としたものであり、その根本思想は同じである。仏教の基本経典である般若心経には、空や無の字が頻繁に使われている。仏教では、“空”の概念が重要視されていた。

ヒンドゥー教の最高神の一つであるシヴァ神には二重性がある。シヴァ神は宇宙を破壊

し、焼き尽くす役割を持つが、その一方で、空虚の中から破壊した宇宙を再び創造する神であり、人類に恩恵を与えてくれる慈悲深い神でもある。シヴァ神は世界の創造と破壊(空虚・無)の両方の神であった。空虚の中から宇宙は創造されるのである。

すなわち、インド人は“空”の概念に抵抗感はなく、またこのような二重性の考え方に慣れていた。したがって、インド人は、“無い”ことを記号化する、“無い”ことを表す記号が“ある”という発想に抵抗感は無かった。数字は数量概念を記号化したものであるから、“空”の概念を数に当てはめて記号化し、空位を表したと考えられる。

6.2 古代ギリシャにおけるゼロ

ゼロの概念は、“何も無い状態を表す記号が存在する”というところに難しさがある。古代ギリシャ人はバビロニアの位取り記数法を知っていたし、空隙記号も知っていた。しかし、ギリシャ人はゼロを数として受け入れなかったのである。ギリシャ人にとって、数はそれ自身存在しているだけでなく、数は万物であり、万物は数であった。ピタゴラス学派でピタゴラス(前582～500)とほぼ同時代のフィロラオスは次のように言っている。「物は全て数を持つ。何故なら、数がなくてはどんな物も考えることができなく、知ることもしできないからである。何も無いことは数ではない。何も無いことが存在することは認められない。何も無いということは、名前を持たない。名前を持たないものはどのような記号でも表すことはできない³³⁾」。

ギリシャ人は“無”ということ数を数として存在させることを、理解できなく認めることはできなかった。つまり、ゼロは存在しない、ゼロは数ではないとされた。

また、論証的であったギリシャの数学が発展する過程において、ますます論証性が鍛錬され、論理の厳密性が追求された。このよう

な状況の中で、ゼノン(前490頃～)の逆理と呼ばれるものが提案されたが、ギリシャ人はこれを解決できなかった。ゼノンの逆理の一つ“アキレスと亀”の問題を解決するには、無限およびゼロ、極限の概念が必要であったが、アリストテレス(前384～322)は無限の概念を否定して“解決”した。無限の存在が否定されるに伴い、ゼロが改めて否定されたと言うことができる。著者は古代ギリシャにおけるゼロや無限の概念、記数法について考察している³⁴⁾。

このように、ギリシャ人は、位取り記数法のメルクマールと言われるゼロを数として認めず、バビロニアの位取り記数法を継承しなかった。論理・論証性を重視するギリシャ人にとって、“何も無いことが存在する”ことは認めることはできなかったのである。ギリシャ人にとっては、宇宙を破壊し、焼き尽くし、その一方で、宇宙を創造するインドのシヴァ神は到底理解できなかったであろう。

6.3 インドの“空”概念とギリシャ数学の論理性

ところで、“空”とは何であろうか。初期の仏教の経典(中阿含『小空経』)には、“空”の定義とも言うべき次の文章がある。「何物かがそこに存在しないとき、それは何物ということでは空なのだ、とみる。しかもなおそこに何か余れるものが存在するとき、それこそは実在であるとする³⁵⁾」。よく用いられる表現をすると、“空”は有でもなければ無でもない、“空”は有でもあり無でもある。

“空”の概念は、一義的に定まらず、論理的に言えば、同一律、矛盾律、排中律を無視している。小室直樹は、“空”概念は数学的思考を拒否していると言っている³⁶⁾。

数学的思考を拒否したとも言えるインド独特の“空”の概念とゼロの誕生が関係あることは興味深いことである。

一方、古代ギリシャでは、幾何学上の経験

的事実がタレス(前640頃～546頃)によって初めて証明付けられ、ギリシャの数学は論理性という特質を与えられた。アリストテレスは、確実な認識の仕方を研究した。定義、命題の分類、三段論法についての彼の研究成果により、ギリシャの数学は次第に論証的になっていった。近代数学はギリシャに始まったとも言える。

アリストテレスにとっては、命題は必ず真か偽りのどちらかであり、両方とも真、両方とも偽り、真でも偽りでもない、ということは考えられなかった。ギリシャ人が“空”概念、ゼロを受け入れることができなかったのは当然であると考えられる。ギリシャ人は彼ら特有の論理性を発揮したからこそ、ギリシャの数学は論理学と結びつき、近代数学の礎石となったのである。

7. インドの文化と数学

7.1 インドの文化

インドでは、ナンダ朝、マウリア朝、シュンガ朝、シャータヴァーハナ朝、グプタ朝など多数の王国が興亡し、マケドニアのアレクサンドロス大王など外国からの侵入もあった。インドの文化の諸特徴は、グプタ王朝(4世紀～5世紀)までにでき上がったと言われている³⁷⁾。グプタ王朝の時代は海外との交流が盛んになり、中国および中央アジア、ギリシャなどの文化の影響を受けた多様な文化要素が並存していた。この時代に言語の統一が行われ、サンスクリット語が公用語として広く使われるようになった。

グプタ王朝は滅びたが、その文化は滅びなかった。バラモン諸哲学は、断絶することなく今日に至り、寺院建築もグプタ王朝時代の建築様式が後代の模範となっている。カーヴィアと名付けられた美文体の文芸は、宮廷詩人カーリダーサ(4世紀末～5世紀初め)において絶頂に達したが、彼の作品は引き続き愛唱され、その戯曲も上演されていた。民衆

はヴェーダの祭りをを行い、ヒンドゥーの生活習慣を保持した。また、社会慣習についてもこの時代に作られた法典が後世まで受け継がれた³⁸⁾。グプタ王朝後、諸王朝の盛衰興亡、イスラムの侵入などがあったが、ヒンドゥーの文化は絶えることなく現代に引き継がれ、インドの数学も発展してきた。

一方、古代エジプト王国は紀元前525年、ペルシャに征服されている。古代バビロニア王国は紀元前2000年頃から紀元前1200年頃まで続き、アッシリアに征服された。その後、古代バビロニア文明は、紀元前623年に興った新バビロニア王国に引き継がれたが、新バビロニア王国も紀元539年にペルシャに滅ぼされている。このように、古代エジプト、古代バビロニアの文明は現代に引き継がれなかったと考えられる。

7.2 インドの数学

7.2.1 幾何学

十進位取り記数法を生み出したインド数学の特徴をギリシャ数学と比較して簡潔に述べる。

古代インドの数学は、祭祀に関係しておこり、祭儀のための数学であった。また天文学に関連して発達した。ガンジス文明を形成したアーリア人の宗教はバラモン教であり、アーリア人は神々へ祈願するための祭祀をきわめて厳格、丁寧に行った。

祭場や祭壇については厳格な規定があり、それに従って、祭壇の位置や形状、大きさを決めなければならなかった。これらの規定に基づいて、祭場や祭壇を作るための作図法を記した文献に『シュルバーストラ』というものがある。このような祭儀上の必要性から幾何学が発達した。

三角形や四角形、円の面積公式、ピタゴラスの定理なども知られていた。また、三角形の面積を三辺の長さから求めるヘロンの公式や円に内接する四辺形についてのトレミーの

定理も知られていたが、どれも証明はされていない。インド人は図形の面積の計算や作図法などには興味を持っていたが、ギリシャ人と異なり、証明など図形の論理的な探究には興味を持たなかった。

7.2.2 代数学・数計算

祭儀に関係して、四角形、台形などの形や大きさを決める作図法が考え出されたが、それに付随して計算も行われた。

インド人はギリシャ人に比べて幾何学にあまり興味を持っていなかったため、数字を形や図形と結び付けて考えることはなかった。二つの異なる数の掛け算でも長方形の面積と考えなかった。したがって、ゼロ掛けるゼロの四角形とはどのような四角形であるかなどと悩みはしなかったと思われる。幾何学的意味を排除し、掛け算などは数と数との相互作用と捉えていた³⁹⁾。そして、インドでは代数学が発達し、代数学ではギリシャ数学をしのいでいた。

7.2.3 数・記数法への関心

インド人は大きな数やその演算にきわめて早くから強い関心を示し、一万の一万といった呼び方をしていたギリシャ人よりも大きな数を言えたり簡単に扱えたのである。

また、宗教聖典には、数や数詞が何度も現れている。たとえば、ヒンドゥー教のアーハヴァニーヤと呼ばれる祭火では、数詞の予格+スヴァーハ(僧莎訶)が繰り返されている。そして、最後の祭詞にシャタ(10^2)からパラールダ(10^{12})までの十進名称が唱えられるのである⁴⁰⁾。これらも、インド人の数に対する関心の深さを示していると言える。

さらに、数だけでなく数表記にもきわめて強い関心を示し、数字以外の数表記も考えていた。それらの一つ、アルファベット(音素)式記数法では、アルファベットの子音で表された数に、母音で表された100のべき乗が加

けられ、きわめて大きな数がつくられた。そして、その大きな数は短い語に置き換えられた⁴¹⁾。

単語連想式記数法は、通常の単語によって自然にあるいは慣習的に連想される数を表す方法である⁴²⁾。たとえば、*śūnya-ambara-aṣṭa-lavaṇoda-ṣaṭka*と表せば、これは、数として64800を表す。*śūnya*の意味は空虚であり、数としては0を表す。これを*śūnya*(空虚：0)と表せば、第2番目以降の語は*ambara*(空：0)、*aṣṭa*(八：8)、*lavaṇoda*(海：4)、*ṣaṭka*(六：6)となる。桁の順は左から右になっているが、単語・数を並べるだけであり、位取り表記法が基本となっているようである。この単語連想式記数法は紀元550年頃には、十分に発達している。

一方、ギリシャでは、幾何学が重視され、物を数えたり計算に関することは軽視されていた。ギリシャの記数法(アルファベット記数法)を図10に示す。この記数法は、日常用いるアルファベットの文字を数に当てはめるものであった。アルファベット27文字(古い時代のアルファベット3文字を含む)を三つ

のグループに分け、第1組は一の位の1、2、3…9を、第2組は十の位の10、20、30…90を、第3組は百の位の100、200、300…900を表した。

第4節第2項で述べた“数記号の暗号化”の観点から見れば、一の位の数字だけを暗号化しただけでなく、十の位、百の位の数字も暗号化したものであった。数の序列に従って、記号(数字)を繰り返す方法から数記号の暗号化の道を通ったことは、位取り記数法への第1歩と見ることができるが、ギリシャのこの方法は過度の暗号化であった。

この記数法はゼロを必要とせず、位取り記数法ではなかったが、3桁の数を表すには簡潔明瞭であった。しかし、各桁ごとに記号を変えているので多数の記号を用意しなければならなかった。さらに、4桁の数など大きな数を表すためにはさまざまな工夫をしなければならなかった。

アポロニオス(前260頃～200頃)やアルキメデス(前287頃～212)は大きな数の表し方を工夫しているが、全体的には数の計算や数の表記法についての研究は精力的には行われなかった。

数を表す際に、アルファベットの文字を使う方法はギリシャ人が創案した。この方法は、その後、ユダヤ、アラブ、スラブ、ゴート等へ伝わっていった。

8. まとめ

以上、古代インドにおける十進位取り記数法の成立の過程について、数字・記数法の歴史において共通に見られる特徴や諸規則に触れながら考察した。

インドの数記号は、記録に残っている時点では既に暗号化されていた。その後、具体的位取り表記法を経て、位取り記数法へ発展していった。十進法や数記号の暗号化、具体的位取り表記などは、インドにおいてのみ見られる特徴ではなかった。これらはエジプトの

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ι	χ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	Ϙ	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	
α	β	γ						δ	
1000	2000	3000						9000	

ς	6 (バイ)	} 古い文字	$\overline{\varepsilon \tau \pi \eta} = 5388$ $\overline{\lambda \alpha} \overline{\delta \sigma \lambda} = 314230$
ϙ	90 (コッパ)		
Ϙ	900 (サムビ)		

図10 古代ギリシャのアルファベット数字と数(イー・ヤー・デップマン⁴³⁾、「算数の文化史」、現代工学社より)

数・記数法においても見られる。また、古代バビロニアでは不完全であったが、十進法と六十進法を併用した位取り記数法が用いられ、現代のゼロに相当する空位を表す記号も用いられていた。

インド人がエジプト人などと異なり、十進位取り記数法に到達したと考えられる要因はいくつかある。船山良三はインドで位取り記数法が生まれたと考えられる環境として、①古くから書板計算が行われていた、②古くから十進法が定着していた、③“空位”の記号が生まれやすかった⁴⁴⁾を挙げている。

本稿では、インドで十進位取り記数法が生まれた要因として次の五つを挙げる。

1) 書板計算(筆記計算)が行われた

第1の要因は、書板計算、いわゆる筆記計算が用いられ、計算に便利な数字や記数法が必要であったことである。

インドの書板計算では、計算途中で次々と数字が消され書き直される。したがって、簡潔な数字や計算に便利な記数法が必要であった。数計算と数表示が同次元で考えられるようになったのである。書板計算を行う中で、どのような数字や記数法であれば加算、減算などの計算が便利であるかが考えられ、位取り記数法が誕生したと考えられる。

一方、エジプト、バビロニア、ギリシャ、ローマなどでは、基本的に計算は計算盤で行われ、その結果は彼ら独自の記数法で表された。計算は位取り表記に基づく計算盤で行われ、記録は位取り表記に基づかないものであった。位取りの原理に基づく計算盤による計算とその結果を表記する方法が接点を持たなかったのである。

2) 具体的位取り表記法が位取り記数法への糸口となる

第2の要因は、具体的位取り表記が百の位、千の位で行われ、具体的位取り表記法を拠り所としてさらに便利な数表示が工夫されたことである。

百や千などの単位の記号を繰り返すのではなく、百や千の位を表す記号が用いられ、単位記数法よりは簡潔、便利になった。そして、具体的位取り表記法を用いて書板計算を行う中で、それぞれの位を表す記号を記憶し、書かねばならない不便さに気付き、さらに簡潔で便利な数字や記数法が生まれたと考えられる。

3) ゼロの誕生

第3の要因は、インド人は“空”概念を数に当てはめて、ゼロ記号・ゼロを発明し、それを数として認めたことである。

ゼロを数として認めたことにより、1～9および0の10個の数字がそろい、十進位取り記数法を用いてどんな大きな数でも表すことができるようになったのである。

4) 数・記数法への強い関心

第4の要因は、インド人は数に対する感受性や好奇心・興味がきわめて強く、記数法にも関心が強かったことである。

インド人はきわめて古くから、大きな数にも関心を持ち、数の塔と呼ばれる十進構造をつくっていた。数詞もヒンドゥー教、仏教系、ジャイナ教系などがあり、その他種々の数表示も行われていた。

5) 独自文化の形成

第5の要因は、インド独自の文化が形成され、独自の数字・記数法が途切れることなく発展し得る環境があったことである。

インドでは中国および中央アジア、ギリシャなどの文化の影響を受けた多様な文化要素が並存していた。インドはこのような異質の文化を抱合し、インド化しようとしたが中国文化もギリシャ文化もインドには入りきれなかった。インドの文化は、ギリシャやローマの文化、アリストテレスの哲学に大きく影響され過ぎることはなかった。そして、インド独自の文化が形成され、多くの国に影響を及ぼしたギリシャのアルファベット記数法にとらわれることなく、独自の数字・記数法が

発展したと考えられる。

引用・参考文献

- 1) 上垣 渉・何森 仁：数とその歴史53話，三省堂，119-120頁(1996)
- 2) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：数字の歴史－人類は数をどのようにかぞえてきたか－，平凡社，323-324頁(1988)
- 3) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，89頁
- 4) 林 隆夫：インドの数学，中央公論社，3頁(1993)
- 5) K.メニンガー，内林政夫訳：図説 数の文化史－世界の数字と計算法－，八坂書房，291頁(2001)
- 6) 林 隆夫：前掲書4)，3頁
- 7) 林 隆夫：前掲書4)，10頁
- 8) 林 隆夫：前掲書4)，12頁
- 9) イー・ヤー・デップマン，藤川 誠訳：算数の文化史，現代工学社，38-41頁(1986)
- 10) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，288頁
- 11) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，289頁
- 12) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，395頁
- 13) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，288頁
- 14) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，288頁
- 15) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，289頁
- 16) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，289頁
- 17) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，396頁
- 18) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，398頁
- 19) 船山良三：身近な数学の歴史，東洋書店，170頁(1991)
- 20) 林 隆夫：前掲書4)，26頁
- 21) 船山良三：前掲書19)，181-182頁
- 22) 船山良三：続 身近な数学の歴史－そろばんからコンピュータまで－，東洋書店，112頁(1996)
- 23) 船山良三：前掲書22)，113-114頁
- 24) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，398頁
- 25) ジョルジュ・イフラー，松原秀一訳・彌永昌吉監修：前掲書2)，397-398頁
- 26) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，292頁
- 27) イー・ヤーデップマン，藤川 誠訳：前掲書9)，56頁
- 28) 林 隆夫：前掲書4)，17頁
- 29) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，292頁
- 30) 林 隆夫：前掲書4)，37-40頁
- 31) K.メニンガー，内林政夫訳：前掲書5)，293-294頁
- 32) 船山良三：前掲書19)，178-180頁
- 33) Midhat Gazale：NUMBER－From Ahmes To Cantor－，Princeton University Press，p.42(2000)
- 34) 西野芳治：古代ギリシャにおける数の概念と記数法に関する一考察，大阪信愛女学院短期大学紀要 第36集，5-18頁(2002)
- 35) フランク・B・ギブニー：ブリタニカ国際大百科事典5，ティビーエス・ブリタニカ，576-577頁(1995)
- 36) 小室直樹：数学嫌いな人のための数学，東洋経済新報社，114-118頁(2001)
- 37) 中村 元：世界の歴史5 ガンジスの文明，講談社，402-403頁(1977)
- 38) 中村 元：前掲書37)，403頁
- 39) Charles Seife：ZERO－The Biography of a Dangerous Idea－Viking Penguin，p.70(2000)
- 40) 林 隆夫：前掲書4)，3-5頁
- 41) 林 隆夫：前掲書4)，18-22頁
- 42) 林 隆夫：前掲書4)，23-26頁
- 43) イー・ヤーデップマン，藤川 誠訳：前掲書9)，45頁
- 44) 船山良三：前掲書22)，107-109頁

(受理 2003年1月27日)